

探索圈龙图的奇优美性*

孙慧¹, 姚兵^{1,2}

(1. 西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070;
2. 兰州交通大学电子与信息工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 图的标号是图论的一个重要分支。定义了2种新图——圈龙图和多毛圈龙图, 并证明它们都具有奇优美标号。多毛圈龙图是通过在圈龙图上加叶子得来的, 证明他们继承了圈龙图的奇优美性, 证明方法能够算法化, 为圈龙图和多毛圈龙图应用于网络提供了可行的理论保证。

关键词: 圈龙图; 多毛圈龙图; 集有序奇优美标号; 奇优美标号; 叶子; 奇优美图

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2017)04-0009-07

Exploring the odd gracefulness of cyclic-dragon graphs

SUN Hui¹, YAO Bing^{1,2}

(1. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;
2. School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The labeling of Graph is an important branch of the graph theory. Two kinds of new graphs, cyclic-dragon graphs and haired cyclic-dragon graphs, are defined. It is proved that they are odd-graceful. The haired cyclic-dragon graphs is made by adding leaves to cyclic-dragon graphs, so they inherit the odd-graceful property of cyclic-dragon graphs, whose method can algorithm that may be a theoretical guarantee for applying cyclic-dragon graphs and haired cyclic-dragon graphs to network.

Key words: cyclic-dragon graphs; haired cyclic-dragon graphs; set-ordered odd-graceful labeling; odd-graceful labeling; leaf; odd-graceful graph

图论作为数学的一大分支, 起源于1736年的一个游戏——哥尼斯堡七桥问题。在随后的300年间, 图论的研究迅速发展壮大, 图论的多个分支随之诞生。图的标号作为图论的一个重要分支起源于在1967年Rosa的一篇论文, 他提出了著名而困难的优美树猜想, 并在短短的50年间, 特别是上世纪六十至八十年代, 随着计算机科学的迅速发展和计算机的广泛应用, 它的研究发展尤为迅速。如今, 图的标号在现代科学技术中的诸多领域(计算机科学、信息科学、密码学、数学证明等等)都得到广泛地应用。在进攻Rosa的优美树猜想过程中, 许多新的图标号不断被发现, 使得图标号成

为图论的一个庞大的分支^[1-8]。奇优美标号是图标号的重要种类^[9], 文献[10-15]给出关于图的奇优美性的一些结果。本文受文献[8, 14]以及环形计算机网络的启发, 发现两类具有奇优美标号的新图类——圈龙图和多毛圈龙图。

文中所考虑的图均为有限、无向、简单图。文中没有定义的术语和符号参见文献[15]。为方便起见, 用记号 $[m, n]$ 表示集合 $\{m, m+1, m+2, \dots, n\}$, 其中 m 和 n 均为非负整数, 且满足 $0 \leq m < n$; 用记号 $[s, t]^o$ 表示集合 $\{s, s+2, \dots, t\}$, 其中 s 和 t 均为奇数。

一个 (p, q) -图 G 是指 $|V(G)| = p$ 和

* 收稿日期: 2016-12-16

基金项目: 国家自然科学基金(61163054, 61363060, 61662066)

作者简介: 孙慧(1992年生), 女; 研究方向: 图着色与标号; E-mail: 18919104606@163.com

通信作者: 姚兵(1956年生), 男; 研究方向: 图着色与标号、复杂网络及优化; E-mail: yybb918@163.com

$|E(G)| = q$. 图 G 的一个从顶点集 $V(G)$ (或边集 $E(G)$, 或全集 $V(G) \cup E(G)$) 到一个非负正数集的单射 f 是指任何 2 个不同顶点 u, v (或 2 条边或 2 个元素) 的像不同, 即 $f(u) \neq f(v)$, 称 f 为 G 的一个标号 (labeling). 以下顶点标号集合 $\{f(u) \mid u \in V(G)\}$ 简记为 $f(V(G))$, 边标号集合 $\{f(uv) \mid uv \in E(G)\}$ 简记为 $f(E(G))$.

定义 1^[14-15] 对于给定的 (p, q) -图 G , 如果存在一个单射 $f: V(G) \rightarrow [0, q]$, 使得边标号集合 $\{f(uv) = |f(u) - f(v)| \mid uv \in E(G)\} = [1, q]$, 则称 f 是 G 的一个优美标号 (graceful labeling), 也称 G 为优美图 (graceful graph). 此外, 若图 G 是具有顶点二部划分 (X, Y) 的二部图, 且 f 满足 $\max\{f(x) \mid x \in X\} < \min\{f(y) \mid y \in Y\}$ (以下简称 $f(X) < f(Y)$), 则称 f 是 G 的一个集有序优美标号 (set-ordered graceful labeling).

定义 2 对于给定的 (p, q) -图 G , 如果存在一个单射 $f: V(G) \rightarrow [0, 2q - 1]$, 使得

$$f(E(G)) = \{f(uv) =$$

$$|f(u) - f(v)| \mid uv \in E(G)\} = [1, 2q - 1]^{\circ}$$

则称 G 为奇优美图 (odd-graceful graph), f 是 G 的一个奇优美标号 (odd-graceful labeling). 若图 G 是具有顶点二部划分 (X, Y) 的二部图, 且 f 满足 $f(X) < f(Y)$, 则称 f 是 G 的一个集有序奇优美标号 (set-ordered odd-graceful labeling).

给出本文的研究对象圈龙图和多毛圈龙图的构造: 设有圈 $C_i = u_{i,1}u_{i,2}\cdots u_{i,a_i}u_{i,1}$ 其长度为 $a_i = |V(C_i)|, i \in [1, n] (n \geq 2)$, 且 $a_i \geq 3, i \in [1, n]$. 进一步, 将圈 C_i 的顶点 $u_{i,2}$ 与圈 C_{i+1} 的顶点 u_{i+1,a_i+1} 重合为一个顶点 ($i \in [1, n-1]$), 再给圈 C_1 的顶点 u_{1,a_1-1} 用一条边 e 连接一个顶点 w 得到的图叫做圈龙图 (cyclic dragon), 记作 $D\langle C_i \rangle_1^n$, 顶点 w 叫做龙须 (dragon whisker), 圈 C_1 叫做圈龙图的头 (head), 圈 C_n 叫做圈龙图的尾巴 (tail). 圈龙图的示意图在图 1 中给出. 在图论学科中, 一度顶点叫做悬挂点, 也叫叶子. 给圈龙图 $D\langle C_i \rangle_1^n$ 的任意的顶点 $u_{i,j}$ 添加 $p_{i,j}$ 片叶子, 其中 $i \in [1, n], j \in [1, a_i]$ 和 $p_{i,j} \geq 0$, 所得到的新图叫做多毛圈龙图 (haired cyclic dragon graph), 记作 $HD\langle C_i \rangle_1^n$.

1 主要结论

在以下的论证中, 若无特殊说明时, a_i 是圈龙图 $D\langle C_i \rangle_1^n$ 的第 i 个圈 C_i 的顶点数目, 圈 C_i 上的顶点记为 $u_{i,j}$, 其中 $i \in [1, n]$ 和 $j \in [1, a_i]$.

引理 1 若圈龙图 $D\langle C_i \rangle_1^n = G$ 具有奇优美标号 f , 则 G 是二部图.

证明 设 f 是 G 的奇优美标号. 现定义 $X = \{v \mid f(v) \text{ 是偶数}\}, Y = \{v \mid f(v) \text{ 是奇数}\}$. 显然, $V(G) = X \cup Y$ 以及 $X \cap Y = \emptyset$. 由于 G 的每一条边 uv 的标号为奇数, 所以 X 和 Y 都是独立集.

定理 1 设在圈龙图 $D\langle C_i \rangle_1^n$ 中, 若 $a_i \equiv 0 \pmod{4} (i \in [2, n])$, 且 $a_1 \equiv 2 \pmod{4}$, 则圈龙图 $D\langle C_i \rangle_1^n$ 具有集有序奇优美标号.

证明 采用第一节中关于圈龙图 $D\langle C_i \rangle_1^n$ 的顶点重合以及记号. 为简便, 令 $D\langle C_i \rangle_1^n = G, |V(G)| = p, |E(G)| = q, \alpha(i) = \frac{a_i}{2}, L(i) = \sum_{j=1}^i a_j, s = 2[L(n) + 1], F(i) = \sum_{j=i}^n a_j (i \in [1, n])$, 其中 $F(n + 1) = 0$. 定义圈龙图 G 的一个标号函数 f 如下:

$$f(u_{1,2k}) = \begin{cases} s - F(2) - 2k + 2n - 1, \\ k \in [1, \frac{a_1 + 2}{4}]; \\ s - F(2) - 2k + 2n - 3, \\ k \in [\frac{a_1 + 2}{4} + 1, \alpha(1) - 1]; \\ F(1) + 2n - 3, k = \alpha(1) \end{cases}$$

$$f(w) = s - F(1) + 2n - 3;$$

$$f(u_{1,2k-1}) = F(2) + 2k + 2n - 4, k \in [1, \alpha(1)]$$

$$\text{当 } i \in [2, n] \text{ 时,}$$

$$f(u_{i,2k}) = s - F(i + 1) - 2k + 2n - 2i + 1,$$

$$k \in [1, \alpha(i)]$$

$$f(u_{i,2k-1}) = \begin{cases} F(i + 1) + 2k + 2n - 2i - 2, k \in [1, \frac{a_i}{4}]; \\ F(i + 1) + 2k + 2n - 2i, k \in [\frac{a_i}{4} + 1, \alpha(i)] \end{cases}$$

下面证明 f 是 $D\langle C_i \rangle_1^n$ 的一个奇优美标号.

(i) 任何 2 个顶点的标号互不相同, 且对任意顶点 $u \in V(G)$, 总有 $f(u) \in [0, 2q - 1]$. 在圈龙图 G 的头中, k 按取值范围取不同值时, 圈龙图 G 上的顶点标号分别为:

$$f(u_{1,2}) = s - F(2) + 2n - 3, f(u_{1,4}) = s - F(2) + 2n - 5, \dots,$$

$$f(u_{1,\alpha(1)+1}) = s - F(2) + 2n - \alpha(1) - 2,$$

$$f(u_{1,\alpha(1)+3}) = s - F(2) + 2n - \alpha(1) - 6,$$

$$f(u_{1,\alpha(1)+5}) = s - F(2) + 2n - \alpha(1) - 8, \dots,$$

$$f(u_{1,a_1-2}) = s - F(2) + 2n - a_1 - 3,$$

$$f(u_{1,a_1}) = F(1) + 2n - 3, f(w) = s - F(1) + 2n - 3,$$

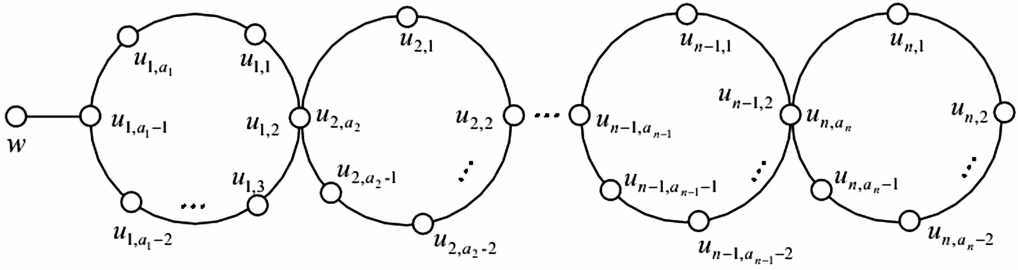


图 1 圈龙图 $D\langle C_i \rangle_1^n$

Fig. 1 A scheme of a cyclic dragon-graph $D\langle C_i \rangle_1^n$

$$f(u_{1,1}) = F(2) + 2n - 2, f(u_{1,3}) = F(2) + 2n, \dots,$$

$$f(u_{1,a_1-1}) = F(2) + 2n + a_1 - 4$$

当 $i \in [2, n]$ 时，圈龙图 G 上的顶点标号分别为：

$$f(u_{i,2}) = s - F(i + 1) + 2n - 2i - 1,$$

$$f(u_{i,4}) = s - F(i + 1) + 2n - 2i - 3, \dots,$$

$$f(u_{i,a_i}) = s - F(i + 1) + 2n - 2i + 1 - a_i,$$

$$f(u_{i,1}) = F(i + 1) + 2n - 2i,$$

$$f(u_{i,3}) = F(i + 1) + 2n - 2i + 2, \dots,$$

$$f(u_{i,\alpha(i)-1}) = F(i + 1) + 2n - 2i - 2 + \alpha(i),$$

$$f(u_{i,\alpha(i)+1}) = F(i + 1) + 2n - 2i + \alpha(i) + 2,$$

$$f(u_{i,\alpha(i)+3}) = F(i + 1) + 2n - 2i + \alpha(i) + 4, \dots,$$

$$f(u_{i,a_i-1}) = F(i + 1) + 2n - 2i + a_i$$

不难发现，在一个圈龙图 G 中，不同的顶点 $u_{i,j}$ ($j = 2k$ 或 $j = 2k - 1$) 的标号 $f(u_{i,j})$ 彼此互不相同，那么，除了在圈 C_i 和 C_{i+1} 的公共顶点以外，当 i 从 1 取到 n 时，任何两个不同的顶点的标号皆不相同。需要注意的是，2 个圈 C_i 和 C_{i+1} 的公共顶点的顶点标号是

$$f(u_{i,2}) = f(u_{i+1,a_{i+1}}) = s - F(i + 1) + 2n - 2i - 1$$

此外，

$$\min\{f(u) \mid u \in V(G)\} =$$

$$f(u_{n,1}) = F(n + 1) + 2n - 2n = 0,$$

$$\max\{f(u) \mid u \in V(G)\} = f(u_{n,2}) =$$

$$s - F(n + 1) + 2n - 2n - 1 = s - 1 = 2q - 1$$

这就证明：当 $u \neq v (u, v \in V(G))$ 时，总有 $f(u) \neq f(v)$ 和 $f(V(G)) \subset [0, 2q - 1]$ 。

(ii) 边标号互不相同，使对任意的边 $uv \in E(G)$ ，总有 $f(uv) \in [1, 2q - 1]^o$ 。根据顶点标号，按照 $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ 可以计算出相应的边标号： $f(u_{1,a_1}u_{1,1}) = a_1 - 1$,

$$f(u_{1,2k}u_{1,2k-1}) =$$

$$\begin{cases} 2a_1 - 4k + 5, & k \in \left[1, \frac{a_1 + 2}{4}\right]; \\ 2a_1 - 4k + 3, & k \in \left[\frac{a_1 + 2}{4} + 1, \alpha(1) - 1\right] \end{cases}$$

$$f(u_{1,a_1}u_{1,a_1-1}) = 1,$$

以及

$$f(u_{1,2k}u_{1,2k+1}) =$$

$$\begin{cases} 2a_1 - 4k + 3, & k \in \left[1, \frac{a_1 + 2}{4}\right]; \\ 2a_1 - 4k + 1, & k \in \left[\frac{a_1 + 2}{4} + 1, \alpha(1) - 1\right] \end{cases}$$

$f(wu_{1,a_1-1}) = 3$ 。当 $i \in [2, n]$ 时， $f(u_{i,a_i}u_{i,1}) = 2L(i) - a_i + 3$ ，以及

$$f(u_{i,2k}u_{i,2k+1}) =$$

$$\begin{cases} 2L(i) - 4k + 5, & k \in \left[1, \frac{a_i}{4}\right]; \\ 2L(i) - 4k + 3, & k \in \left[\frac{a_i}{4} + 1, \alpha(i)\right] \end{cases}$$

$$f(u_{i,2k}u_{i,2k+1}) =$$

$$\begin{cases} 2L(i) - 4k + 3, & k \in \left[1, \frac{a_i}{4} - 1\right]; \\ 2L(i) - 4k + 1, & k \in \left[\frac{a_i}{4}, \alpha(i) - 1\right] \end{cases}$$

在圈龙图 G 的头中，当 k 的取值范围取不同时，圈龙图 G 上的边标号取值分别为：

$$f(u_{1,a_1}u_{1,1}) = |f(u_{1,a_1}) - f(u_{1,1})| = a_1 - 1,$$

$$f(u_{1,2}u_{1,1}) = |f(u_{1,2}) - f(u_{1,1})| = 2a_1 + 1,$$

$$f(u_{1,4}u_{1,3}) = |f(u_{1,4}) - f(u_{1,3})| = 2a_1 - 3, \dots,$$

$$f(u_{1,\alpha(1)+1}u_{1,\alpha(1)}) =$$

$$|f(u_{1,\alpha(1)+1}) - f(u_{1,\alpha(1)})| = a_1 + 3,$$

$$f(u_{1,\alpha(1)+3}u_{1,\alpha(1)+2}) =$$

$$|f(u_{1,\alpha(1)+3}) - f(u_{1,\alpha(1)+2})| = a_1 - 3,$$

$$f(u_{1,\alpha(1)+5}u_{1,\alpha(1)+4}) =$$

$$|f(u_{1,\alpha(1)+5}) - f(u_{1,\alpha(1)+4})| = a_1 - 7, \dots,$$

$$f(u_{1,a_1-2}u_{1,a_1-3}) =$$

$$|f(u_{1,a_1-2}) - f(u_{1,a_1-3})| = 7,$$

$$f(u_{1,a_1}u_{1,a_1-1}) = |f(u_{1,a_1}) - f(u_{1,a_1-1})| = 1,$$

$$f(u_{1,2}u_{1,3}) = |f(u_{1,2}) - f(u_{1,3})| = 2a_1 - 1,$$

$$f(u_{1,4}u_{1,5}) = |f(u_{1,4}) - f(u_{1,5})| = 2a_1 - 5, \dots,$$

$$f(u_{1,\alpha(1)+1}u_{1,\alpha(1)+2}) =$$

$$|f(u_{1,\alpha(1)+1}) - f(u_{1,\alpha(1)+2})| = a_1 + 1,$$

$$f(u_{1,\alpha(1)+3}u_{1,\alpha(1)+4}) =$$

$$|f(u_{1,\alpha(1)+3}) - f(u_{1,\alpha(1)+4})| = a_1 - 5,$$

$$f(u_{1,\alpha(1)+5}u_{1,\alpha(1)+6}) =$$

$$|f(u_{1,\alpha(1)+5}) - f(u_{1,\alpha(1)+6})| = a_1 - 9, \dots,$$

$$f(u_{1,a_1-2}u_{1,a_1-1}) =$$

$$|f(u_{1,a_1-2}) - f(u_{1,a_1-1})| = 5,$$

$$f(wu_{1,a_1-1}) = |f(w) - f(u_{1,a_1-1})| = 3$$

当 $i \in [2, n]$ 时, 可计算出圈龙图 G 上的边 $u_{i,j}u_{k,l}$ 的标号如下:

$$f(u_{i,a_i}u_{i,1}) = |f(u_{i,a_i}) - f(u_{i,1})| =$$

$$2L(i) - a_i + 3,$$

$$f(u_{i,2}u_{i,1}) = |f(u_{i,2}) - f(u_{i,1})| = 2L(i) + 1,$$

$$f(u_{i,4}u_{i,3}) = |f(u_{i,4}) - f(u_{i,3})| = 2L(i) - 3, \dots,$$

$$f(u_{i,\alpha(i)}u_{i,\alpha(i)-1}) = |f(u_{i,\alpha(i)}) - f(u_{i,\alpha(i)-1})| =$$

$$2L(i) - a_i + 5,$$

$$f(u_{1,\alpha(i)+2}u_{1,\alpha(i)+1}) =$$

$$|f(u_{1,\alpha(i)+2}) - f(u_{1,\alpha(i)+1})| = 2L(i) - a_i - 1,$$

$$f(u_{1,\alpha(i)+4}u_{1,\alpha(i)+3}) =$$

$$|f(u_{1,\alpha(i)+4}) - f(u_{1,\alpha(i)+3})| = 2L(i) - a_i - 5, \dots,$$

$$f(u_{i,a_i}u_{i,a_i-1}) =$$

$$|f(u_{i,a_i}) - f(u_{i,a_i-1})| = 2L(i - 1) + 3,$$

$$f(u_{i,2}u_{i,3}) = |f(u_{i,2}) - f(u_{i,3})| = 2L(i) - 1,$$

$$f(u_{i,4}u_{i,5}) = |f(u_{i,4}) - f(u_{i,5})| = 2L(i) - 5, \dots,$$

$$f(u_{i,\alpha(i)-2}u_{i,\alpha(i)-1}) =$$

$$|f(u_{i,\alpha(i)-2}) - f(u_{i,\alpha(i)-1})| = 2L(i) - a_i + 7,$$

$$f(u_{1,\alpha(i)}u_{1,\alpha(i)+1}) =$$

$$|f(u_{1,\alpha(i)}) - f(u_{1,\alpha(i)+1})| = 2L(i) - a_i + 1,$$

$$f(u_{1,\alpha(i)+2}u_{1,\alpha(i)+3}) =$$

$$|f(u_{1,\alpha(i)+2}) - f(u_{1,\alpha(i)+3})| = 2L(i) - a_i - 3, \dots,$$

$$f(u_{i,a_i-2}u_{i,a_i-1}) =$$

$$|f(u_{i,a_i-2}) - f(u_{i,a_i-1})| = 2L(i - 1) + 5$$

在圈龙图 G 中, 每一个边标号的值也取决于 i 和 k , 在同一个圈 C_i 上, 不同的边 $u_{i,j}v_{i,l}$, 当 k 按取值范围取不同值时, 显然边标号 $f(u_{i,j}v_{i,l})$ 彼此互不相同。

此外,

$$\min\{f(uv) \mid uv \in E(G)\} = f(u_{1,a_1}u_{1,a_1-1}) = 1,$$

$$\max\{f(uv) \mid uv \in E(G)\} = f(u_{n,2}u_{n,1}) =$$

$$2F(1) - 1 = s - 1 = 2q - 1$$

上述过程已经证明 $f(E(G)) = [1, 2q - 1]^o$ 。

(iii) 集有序性。每个 $f(u_{i,2k-1}) (i \in [1, n], k \in [1, \alpha(i)])$ 是偶数, 每个 $f(u_{i,2k}) (i \in [1, n], k \in [1, \alpha(i)])$ 和 $f(w)$ 是奇数。令

$$X = \{u_{i,2k-1} \mid u_{i,2k-1} \in V(G),$$

$$i \in [1, n], k \in [1, \alpha(i)]\};$$

$$Y = \{u_{i,2k-1} \mid u_{i,2k-1} \in V(G),$$

$$i \in [1, n], k \in [1, \alpha(i)]\} \cup \{w\}$$

注意到, 当 $i \in [1, n]$ 时, 有 $f(u_{i,2k-1}) < f(u_{i,2k+1}) (k \in [1, \alpha(i) - 1])$; 当 $i \in [2, n]$ 时, 有 $f(u_{i,a_i-1}) < f(u_{i-1,1})$ 。

另一方面, 在圈龙图 G 的头中, 有

$$f(u_{1,a_1}) < f(w), f(w) < f(u_{1,a_1-2}),$$

$$f(u_{1,2k}) < f(u_{1,2(k-1)}) (k \in [2, \alpha(1) - 1]),$$

$$f(u_{1,a_1-1}) < f(u_{1,a_1})$$

当 $i \in [2, n]$ 时, 有 $f(u_{i,2k}) < f(u_{i,2(k-1)}) (k \in [2, \alpha(i)])$ 。此外,

$$f(u_{n,1}) = 0, f(u_{1,a_1-1}) = F(2) + 2n + a_1 - 4,$$

$$f(u_{1,a_1}) = F(1) + 2n - 3, f(u_{n,2}) =$$

$$s - F(n + 1) - 1 = 2q - 1$$

因为

$$\min\{f(uv) \mid uv \in E(G)\} = f(u_{1,a_1}u_{1,a_1-1}) = 1,$$

$$f(u_{1,a_1}u_{1,a_1-1}) < f(u_{1,a_1-1}w),$$

$$f(u_{1,a_1-1}w) < f(u_{1,a_1-1}u_{1,a_1-2}),$$

$$f(u_{1,2k}u_{1,2k+1}) < f(u_{1,2k}u_{1,2k-1})$$

$$\left(k \in \left[\frac{a_1 + 2}{4} + 1, \alpha(1) - 1\right]\right),$$

$$f(u_{1,\alpha(1)+3}u_{1,\alpha(1)+2}) < f(u_{1,1}u_{1,a_1}),$$

$$f(u_{1,1}u_{1,a_1}) < f(u_{1,\alpha(1)+1}u_{1,\alpha(1)+2}),$$

$$f(u_{1,2k}u_{1,2k+1}) < f(u_{1,2k}u_{1,2k-1}) \left(k \in \left[1, \frac{a_1 + 2}{4}\right]\right);$$

当

$$i \in [2, n], f(u_{i-1,1}u_{i-1,2}) < f(u_{i,a_i-1}u_{i,a_i}),$$

$$f(u_{i,2k-1}u_{i,2k}) < f(u_{i,2k-1}u_{i,2(k-1)})$$

$$\left(k \in \left[\frac{a_i}{4} + 1, \alpha(i)\right]\right),$$

$$f(u_{i,\alpha(i)+1}u_{i,\alpha(i)}) < f(u_{i,1}u_{i,a_i}),$$

$$f(u_{i,2k-1}u_{i,2k}) < f(u_{i,2k-1}u_{i,2(k-1)}), \left(k \in \left[2, \frac{a_i}{4}\right]\right),$$

$$f(u_{i,3}u_{i,2}) < f(u_{i,2}u_{i,1})$$

综合知: f 满足奇优美标号的定义且有 $f(X) < f(Y)$, 定理证明完毕。

图 2 是定理 1 的一个示例。

定理 2 若圈龙图 $D\langle C_i \rangle_1^n$ 满足 $a_i \equiv 0 \pmod{4}$

4) ($i \in [2, n]$), $a_1 \equiv 2 \pmod{4}$, 那么在其上通过任意加叶子, 得到的多毛圈龙图 $HD\langle C_i \rangle_1^n$ 是奇优美图。

证明 令

$$\alpha(i) = \frac{a_i}{2}, L(i) = \sum_{j=1}^i a_j,$$

$$s = 2[L(n) + 1], F(i) = \sum_{j=1}^n a_j (i \in [1, n]),$$

其中

$$F(n + 1) = 0,$$

$$F^*(i) = \sum_{j=i}^n \alpha(j) (i \in [2, n]),$$

其中

$$F^*(n + 1) = 0,$$

$$L^*(k) = \sum_{j=1}^k \alpha(j) (k \in [1, n - 1])$$

设圈龙图 $D\langle C_i \rangle_1^n = G$ 具有奇优美标号 f , 且 $|E(G)| = q$ 。由引理 1, 得 $V(G) = X \cup Y$, 此时 $X = \{u_i \mid i \in [1, s]\}, Y = \{v_j \mid j \in [1, t]\}$ 且 $s + t = |V(G)|$ 。由定理 1, 得 f 是集有序奇优美, 即 $f(u_i) < f(u_{i+1}) (i \in [1, s - 1]), f(v_j) < f(v_{j+1}) (j \in [1, t - 1])$, 且 $f(X) < f(Y)$ 。令

$$\begin{aligned} f(u_{k+F^*(i+1)}) &= f(u_{i,2k-1}) (k \in [1, \alpha(i)]), \\ f(u_s v_1) &= f(u_{1,a_1-1} u_{1,a_1}) = 1, \\ f(v_1) &= f(u_{1,a_1}), f(v_2) = f(w), \\ f(v_{\alpha(1)+2-k}) &= f(u_{1,2k}) (k \in [1, \alpha(1) - 1]), \\ f(v_{\alpha(i)-k+L^*(i-1)-i+3}) &= f(u_{i,2k}) \\ (i \in [2, n], k \in [1, \alpha(i) - 1]), \\ f(v_i) &= f(u_{n,2}) = \end{aligned}$$

$s - F(n + 1) + 2n - 2n - 1 = s - 1 = 2q - 1$ 显然, 每个 $f(u_i) (i \in [1, s])$ 是偶数, 每个 $f(v_j) (j \in [1, t])$ 是奇数。

在圈龙图 G 上, 对任意的顶点添加任意片叶子, 得到了一个多毛圈龙图 $HD\langle C_i \rangle_1^n = G^*$ 。设 u_i 的叶子集是 $\{u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,l_i}\}, v_j$ 的叶子集是 $\{v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,k_j}\}$, 其中 $l_i \geq 0, k_j \geq 0, i \in [1, s], j \in [1, t], M(r) = \sum_{i=1}^r l_i, N(r) = \sum_{j=1}^r k_j$ 。因此,

$$|V(G^*)| = |V(G)| + M(s) + N(t),$$

$$|E(G^*)| = |E(G)| + M(s) + N(t)$$

在多毛圈龙图 G^* 上定义一个如下的标号函数 g :

1) 令 $g(u_i) = f(u_i) (i \in [1, s]), g(v_j) = f(v_j) + 2(M(s) + N(t)) (j \in [1, t])$ 。

2) 令 $g(u_1 u_{1,1}) = 1, g(u_{1,1}) = g(u_1) + g(u_1 u_{1,1}) = 1$, 其中 $g(u_1) = 0$ 。定义多毛圈龙图 G^* 的边标号为 $g(u_1 u_{1,j}) = 2j - 1 (j \in [1, l_1])$, 其顶点标号为 $g(u_{1,j}) = g(u_1) + g(u_1 u_{1,j}) = 2j - 1 (j \in [1, l_1])$ 。再定义多毛圈龙图 G^* 的边标号为

$$\begin{aligned} g(u_i u_{i,j}) &= g(u_i u_{i,1}) + 2(j - 1) = \\ &= 1 + 2M(i - 1) + 2(j - 1) = 2(j + M(i - 1)) - 1 \\ &(j \in [1, l_i], i \in [2, s]) \end{aligned}$$

以及顶点标号为 $g(u_{i,j}) = g(u_i) + g(u_i u_{i,j}) (j \in [1, l_i], i \in [2, s])$ 。

3) 令 $g(v_1 v_{1,1}) = 2[M(s) + N(t)] - 1, g(v_{1,1}) = g(v_1) - g(v_1 v_{1,1})$, 定义多毛圈龙图 G^* 的边标号为 $g(v_1 v_{1,l}) = g(v_1 v_{1,1}) - 2(l - 1) = 2(M(s) + N(t)) - 2l + 1 (l \in [1, k_1])$, 顶点标号为 $g(v_{1,l}) = g(v_1) - g(v_1 v_{1,l}) (l \in [1, k_1])$ 。最后定义多毛圈龙

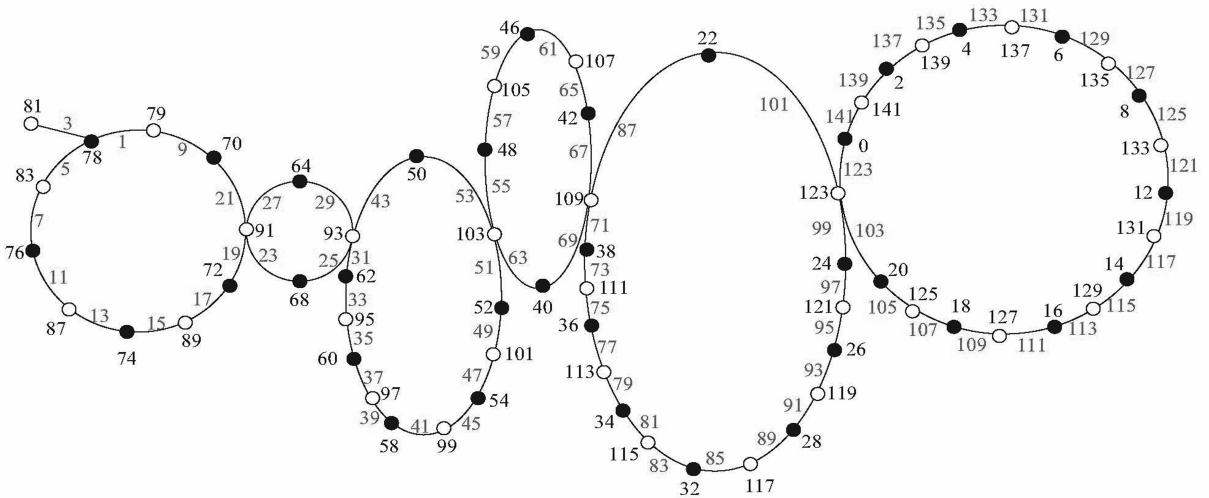


图 2 解释定理 1 的一个例子

Fig. 2 An example for illustrating Theorem 1

图 G^* 的边标号

$$g(v_i v_{i,j}) = g(v_i v_{i,1}) - 2(j-1) = g(v_i v_{i,1}) - 2N(i-1) - 2(j-1) = 2(M(s) + N(t) - N(i-1)) - 2j + 1 \quad (j \in [1, k_i], i \in [2, t])$$

以及它的顶点标号 $g(v_{i,j}) = g(v_i) - g(v_i v_{i,j})$ ($j \in [1, k_i], i \in [2, t]$)。

下面证明 g 是多毛圈龙图 G^* 的奇优美标号。不难看出, 每个 $g(u_i)$ ($i \in [1, s]$) 是偶数, 每个 $g(v_i)$ ($j \in [1, t]$) 是奇数; 每个 $g(u_{i,j})$ ($j \in [1, l_i], i \in [1, s]$) 是奇数, 每个 $g(v_{i,r})$ ($r \in [1, k_i], l \in [1, t]$) 是偶数。显然, $g(u_{i,j}) \neq g(v_{i,r})$ 。注意到

$$g(u_i) < g(u_{i+1}) \quad (i \in [1, s-1]),$$

$$g(v_j) < g(v_{j+1}) \quad (j \in [1, t-1])$$

且 $g(u_s) < g(v_1)$, 此外,

$$g(u_1) = 0,$$

$$g(u_s v_1) = 1 + 2(M(s) + N(t)),$$

$$g(v_i) = 2q - 1 + 2(M(s) + N(t))$$

另外, 还有

$$g(u_i u_{i,j}) < g(u_i u_{i,j+1}) \quad (j \in [1, l_i - 1], i \in [1, s]),$$

$$g(u_i u_{i,l_i}) < g(u_{i+1} u_{i+1,1}) \quad (i \in [1, s-1]),$$

$$g(v_i v_{i,j}) > g(v_i v_{i,j+1}) \quad (j \in [1, k_i - 1], i \in [1, t]),$$

$$g(v_i v_{i,k_i}) > g(v_{i+1} v_{i+1,1}) \quad (i \in [1, t-1])$$

进一步, 有

$$g(u_{i,j}) < g(u_{i,j+1}) \quad (j \in [1, l_i - 1], i \in [1, s]),$$

$$g(u_{i,l_i}) < g(u_{i+1,1}) \quad (i \in [1, s-1]),$$

$$g(v_{i,j}) < g(v_{i,j+1}) \quad (j \in [1, k_i - 1], i \in [1, t]),$$

$$g(v_{i,k_i}) < g(v_{i+1,1}) \quad (i \in [1, t-1])$$

因为

$$g(u_s v_1) = g(v_1) - g(u_s) = 1 + 2(M(s) + N(t)),$$

$$g(v_i v_{i,1}) = g(v_i) - g(v_{i,1}) = 2(M(s) + N(t)) - 1,$$

所以,

$$g(u_s, l_s) = g(u_s) + 2M(s) - 1 < f(v_1) + 2(M(s) + N(t)) = g(v_1),$$

$$g(v_{1,1}) = g(v_1) - 2(M(s) + N(t)) + 1 = f(v_1) + 1 > f(u_s) = g(u_s)$$

因此, 当 $u \neq v$ ($u, v \in V(G^*)$) 时, 总有 $g(u) \neq g(v)$, 以及

$$g(V(G^*)) \subset [0, 2 | E(G^*) | - 1] \quad (1)$$

多毛圈龙图 G^* 的边标号由 2 部分组成:

$$\{g(uv) \mid uv \in E(G^*) - E(G)\} = [1, 2(M(s) + N(t)) - 1]^o$$

和

$$\{g(uv) \mid uv \in E(G) \subseteq E(G^*)\} = [1 + 2(M(s) + N(t)), 2q - 1 + 2(M(s) + N(t))]^o$$

也就是说,

$$g(E(G^*)) = [1, 2q - 1 + 2(M(s) + N(t))]^o = [1, 2 | E(G^*) | - 1]^o \quad (2)$$

满足奇优美标号的定义, 定理 2 得证。

解释定理 2 的一个例子在图 3 中给出。

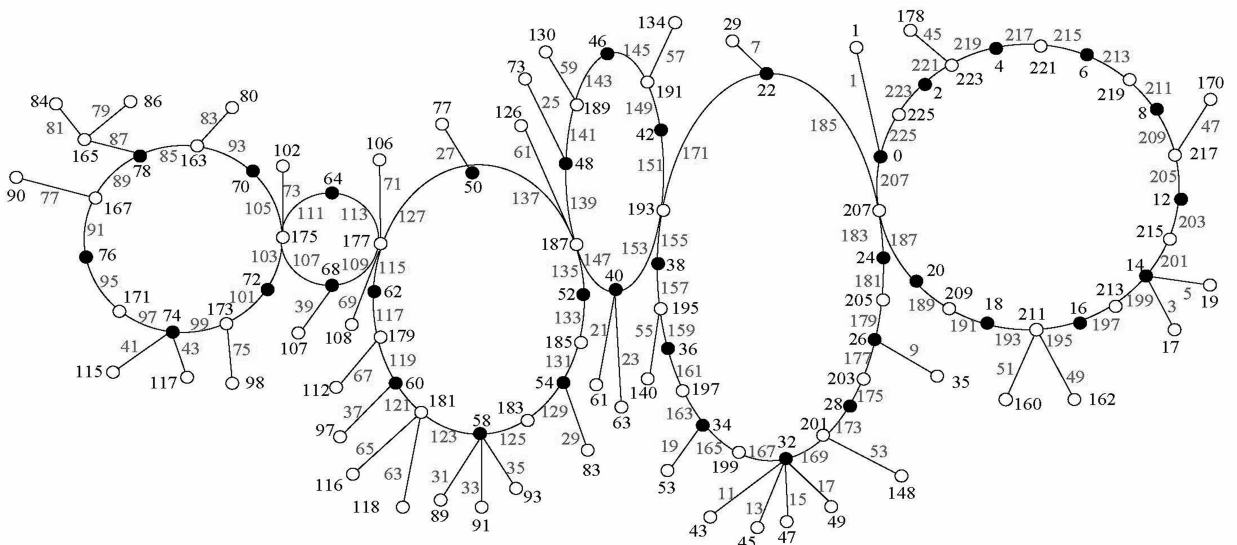


图 3 解释定理 2 的一个例子

Fig. 3 An example for illustrating Theorem 2

2 总结与问题

本文通过探索圈龙图和多毛圈龙图的奇优美性,定义了两种新图——圈龙图和多毛圈龙图,丰富了图论中奇优美图的种类。定理1证明了圈龙图具有集有序奇优美标号,定理2证明了多毛圈龙图具有奇优美标号。但是,进一步研究发现多毛圈龙图则只具有奇优美标号,不再具有集有序的性质。需要注意的是,本文的圈龙图的圈 C_i 和 C_{i+1} 的连接点不能够任意,那么连接点任意的圈龙图的图是否也具有奇优美标号呢?另外,多毛圈龙图是通过圈龙图加叶子得来的,并且良好的继承了圈龙图具有奇优美标号的性质,那么这种加叶子的方法是不是可应用于所有的图,并且新图是否依然继承了原图的标号性质,本文的圈龙图是否具有其他有意义的标号,这些都是今后需要继续研究的课题。

参考文献:

- [1] 魏丽侠,张昆龙. 几类并图的优美标号[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2008, 47(3): 10-13.
WEI L X, ZHANG K L. Graceful labeling of several classes of graphs [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2008, 47(3): 10-13.
- [2] 赵喜杨,姚兵. 探讨树的 (k, d) -边魔幻全标号[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(6): 67-73.
ZHAO X Y, YAO B. Discussion on (k, d) -edge magic total labeling [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(6): 67-73.
- [3] 唐保祥,任韩. 2类优美图的冠的优美标号[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2015, 54(5): 24-27.
TANG B X, REN H. Graceful labeling of 2 kinds of graceful graphs [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2015, 54(5): 24-27.
- [4] CHENG H, YAO B, CHEN X E, et al. On graceful generalized spiders and caterpillars [J]. Ars Combinatoria, 2008, 87: 181-191.
- [5] 姚明,姚兵,赵振学,等. 关于太阳图魔幻标号的若干结果[J]. 甘肃科学学报, 2015, 27(4): 1-5.
YAO M, YAO B, ZHAO Z X, et al. Some results on the magic labeling of the solar graph [J]. Journal of Gansu Science, 2015, 27(4): 1-5.
- [6] 刘信生,刘元元,姚兵,等. 龙图的优美性[J]. 兰州理工大学学报, 2013, 39(3): 133-135.

- LIU X S, LIU Y Y, YAO B, et al. The gracefulness of dragon graph [J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2013, 39(3): 133-135.
- [7] 王宏宇,姚兵,杨超. 一类特殊对称图的边魔幻性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2013, 36(1): 28-33.
WANG H Y, YAO B, YANG C. Edge magic of a class of special symmetric graphs [J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science Edition), 2013, 36(1): 28-33.
- [8] FU M Y, LIU X D, WANG L G. The graceful property of a kind of string graphs [J]. Journal of Southwest University for Nationalities, 2005, 31(6): 843-851.
- [9] GANAJOTHI R B. Topics in graph theory [D]. Madurai: Madurai Kamaraj University, 1991.
- [10] 姚兵,张家娟,郭璟霞. 复合毛毛虫树的优美及奇优美性[J]. 兰州理工大学学报, 2012, 38(4): 147-150.
YAO B, ZHANG J J, GUO J X. The graceful and odd gracefulness of the compound caterpillar tree [J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2012, 38(4): 147-150.
- [11] 谢建民,姚兵,张锐. 两类圈相关图的奇优美标号[J]. 甘肃科学学报, 2013, 25(4): 1-3.
XIE J M, YAO B, ZHANG R. Odd graceful labeling of two class circle correlation graphs [J]. Journal of Gansu Science, 2013, 25(4): 1-3.
- [12] 刘信生,刘元元,姚兵,等. 具有奇优美性的一类龙图[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(4): 47-51.
LIU X S, LIU Y Y, YAO B, et al. A class of graphs with odd gracefulness [J]. Journal of Southwestern University (Natural Science Edition), 2014, 36(4): 47-51.
- [13] 严谦泰. 积图 $P_n \times P_m$ 的奇优美性和奇强协调性[J]. 系统科学与数学, 2010, 30(3): 341-348.
YAN Q T. Product $P_n \times P_m$ odd graceful and odd strongly harmonious [J]. System Science and Mathematics, 2010, 30(3): 341-348.
- [14] ZHOU X Q, YAO B, CHEN X E, et al. A proof to the odd-gracefulness of all lobsters [J]. Ars Combinatoria-Waterloo then Winnipeg-, 2012, 103: 13-18.
- [15] JOSEPH A GALLIAN. A dynamic survey of graph labelling [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2013, 14: DS6.